

7. cvičení - teorie

Symbol $\mathbb{K}$ značí množinu $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Definice. Vektorovým prostorem nad $\mathbb{K}$ rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a $\cdot$ je operace z $\mathbb{K} \times V$ do V , přičemž tyto operace mají následující vlastnosti:

- $\forall u, v \in V : u + v = v + u$ (komutativita sčítání),
- $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\mathbf{o}$ (a říkáme mu nulový prvek), splňující

$$\forall v \in V : \mathbf{o} + v = v,$$

- $\forall v \in V \exists w \in V : v + w = \mathbf{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K} \forall v \in V : a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K} \forall v \in V : (a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$,
- $\forall a \in \mathbb{K} \forall u, v \in V : a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$,
- $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$.

Poznámka. Pro $v \in V$ vektor w splňující $v + w = \mathbf{o}$ je určen jednoznačně (lze to dokázat) a značíme jej $-v$, někdy se označuje jako opačný prvek k prvku v .

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $U \subseteq V, U \neq \emptyset$. Pak U je **vektorový podprostor** prostoru V , pokud je tzv. uzavřen na operace $+$ a $\cdot$, tedy pokud platí

- $\forall u, v \in U : u + v \in U$,
- $\forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in U : a \cdot u \in U$.

Definice. Je-li $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $m \in \mathbb{N}, u_1, \dots, u_m \in V, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, pak vektor

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_m u_m$$

nazýváme **lineární kombinace vektorů** $u_1, \dots, u_m$. Pokud jsou všechna λ_i rovna nule, pak jde o **triviální lineární kombinaci**, v opačném případě o **netriviální lineární kombinaci**. Lineární kombinací prázdné množiny vektorů rozumíme nulový vektor.

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $m \in \mathbb{N}$ a $u_1, \dots, u_m \in V$. Řekneme, že vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, jež je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $u_1, \dots, u_m$ nejsou lineárně závislé, pak říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**. Řekneme, že množina $M \subseteq V$ je **lineárně nezávislá**, jestliže libovolná m -tice po dvou různých vektorů z M je lineárně nezávislá.

Poznámka. Někdy se používá: LN = lineárně nezávislá.

Definice. Je-li $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ a $u_1, \dots, u_m \in V$, pak **lineární obal vektorů** $u_1, \dots, u_m$ je

$$\text{lin}_{\mathbb{K}}\{u_1, \dots, u_m\} = \{v \in V : v \text{ je lineární kombinací vektorů } u_1, \dots, u_m\}.$$

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $B \subseteq V$. Řekneme, že B je **báze prostoru** V , jestliže množina B je lineárně nezávislá a $V = \text{lin}_{\mathbb{K}}(B)$.

Poznámka. Pokud $\text{lin}_{\mathbb{K}}(B) = V$, tak říkáme, že B **generuje** prostor V . Platí tedy, že pokud je B LN a generuje V , tak je bází prostoru V .

Věta 10.1.

- (i) Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.
- (ii) Každý vektorový prostor má bázi. Počet prvků báze je určen jednoznačně.

Definice. Počet prvků báze budeme nazývat **dimenze prostoru** V . Dimenzi V značíme $\dim V$. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Je-li $\dim V < \infty$, řekneme, že V je **konečnědimenzionální**. Je-li $\dim V = +\infty$, mluvíme o **nekonečnědimenzionálním** vektorovém prostoru.